Parabeln - quadratische Funktionen

Roland Heynkes

9.11.2005, Aachen

Das Gleichsetzungsverfahren und die davon abgeleiteten Einsetzungs- und Additionsverfahren kennen wir als Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Man kann sie aber auch einsetzen, um die Parameter[1] quadratischer Gleichungen zu ermitteln.

Inhaltsverzeichnis

[1]Man nennt Parameter auch Koeffizienten und meint damit Konstanten, mit denen die Variablen multipliziert werden.

1 quadratische Gleichung - quadratische Funktion

Die allgmeine Form einer quadratischen Gleichung ist:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

Dabei sind x die unabhängige und y die abhängige Variable, deren Werte man durch das Einsetzen eines x-Wertes und die Berechnung des dazu gehörigen y-Wertes ermittelt. Im Gegensatz dazu sind a, b und c Koeffizienten oder Parameter, die unabhängig vom jeweils eingesetzten x-Wert konstant bleiben und das immer gleich bleibende Verhältnis zwischen x und y bestimmen. ax^2 nennt man das quadratische Glied, bx ist das lineare Glied und c ist das absolute Glied der quadratischen Gleichung.

Setzt man viele verschiedene x-Werte in eine quadratische Gleichung ein und zeichnet die so erhaltenen (x,y)-Wertepaare in ein zweidimensionales Koordinatensystem ein, dann erhält man eine Parabel, deren genaue Form und Lage durch die Paramter der quadratischen Gleichung bestimmt werden.

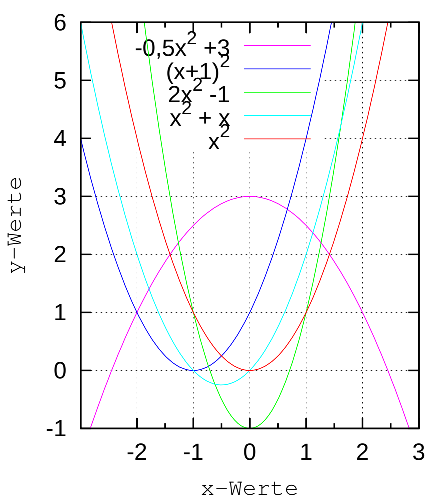
Wenn eine quadratische Gleichung nicht nur der Ermittlung einzelner Wertepaare, sondern als Zuordnungsvorschrift für die Berechnung der y-Koordinaten sehr vieler x-Koordinaten bzw. allgemein zur Ermittlung von Form und Lage einer Parabel dient, dann spricht man von einer quadratischen Funktion und schreibt sie in ihrer allgmeinen Form wie folgt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

Während das y in der quadratischen Gleichung für einen einzelnen Wert steht, meint das f(x) in der quadratischen Funktion die gesamte Kurve im Definitionsbereich der x-Werte.

2 Einfluß der Parameter auf Form und Lage der Parabel

Abbildung 1: Einfluß der Parameter auf Form und Lage der Parabel



Die einfachste Parabel ist die rote Normalparabel mit der quadratischen Funktion oder $f(x) = x^2$.
Die blaue Parabel oder $f(x) = (x + 1)^2$ ist durch die Addition von 1 zum x im quadratischen Glied um 1 Einheit nach links verschoben.
Die grüne Parabel $f(x) = 2x^2 - 1$ ist durch den Parameter 2 im quadratischen Glied gestreckt und durch das absolute Glied um 1 Einheit nach unten verschoben.
Die violette Parabel $f(x) = -0,5x^2 + 0x + 3$ ist durch den Parameter -0,5 im quadratischen Glied gestaucht, nach unten geöffnet bzw. an der x-Achse gespiegelt und durch das absolute Glied (+3) um 3 Einheiten nach oben verschoben.

Die türkisfarbene Parabel $f(x) = x^2 + x + 0$ hat als einzige in diesem Beispiel ein lineares Glied. Sie ist in ihrer Form gegenüber der roten Normalparabel nicht verändert, aber so verschoben, daß ihre Nullstellen bei -1 und 0 liegen.

Eigentlich muß nun die Normalform der quadratischen Funktionsgleichung um einen Parameter d ergänzt werden, der meistens vernachlässigt wird.

$$y = a(x - d)^2 + bx + c \tag{3}$$

Die Wirkungen der Parameter sind im einzelnen:

- Wenn a größer als 1 ist, dann wird die Parabel gestreckt.
- Ein a zwischen 0 und 1 staucht die Parabel.
- Ist a negativ, dann wird die Parabel an der x-Achse gespiegelt.
- Der Scheitelpunkt einer Parabel wird um den Parameter c parallel zur y-Achse nach oben oder unten verschoben.
- Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung des Scheitelpunktes parallel zur x-Achse aber in Gegenrichtung.

3 Von 2 Punkten zur quadratischen Gleichung

Sind zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ einer mit ihrem Scheitelpunkt auf der y-Achse stehenden Parabel gegeben, dann lässt sich mit Hilfe dieser Koordinaten z.B. mittels Subtraktionsverfahren[2] der Parameter a des quadratischen Gliedes der entsprechenden quadratischen Gleichung ermitteln.

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = a \cdot {x_1}^2 + c \\ y_2 = a \cdot {x_2}^2 + c \end{array} \right| \Rightarrow y_1 - y_2 = ({x_1}^2 - {x_2}^2) \cdot a \Longleftrightarrow a = \frac{y_1 - y_2}{{x_1}^2 - {x_2}^2}$$

Anschließend kann man den Parameter a in mindestens einer der beiden Gleichungen einsetzen und das absolute Glied ausrechnen.

$$y_1 = a \cdot {x_1}^2 + c \Longleftrightarrow y_1 - a \cdot {x_1}^2 = c \Longleftrightarrow c = y_1 - a \cdot {x_1}^2$$

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Punkte $P_1(-1|1)$ und $P_2(2|7)$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem aus zwei quadratischen Gleichungen:

$$\left| \begin{array}{l} 1 = a \cdot (-1)^2 + c \\ 7 = a \cdot 2^2 + c \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1 = 1 \cdot a + c \\ 7 = 4 \cdot a + c \end{array} \right| \Rightarrow -6 = -3 \cdot a \Longleftrightarrow a = 2$$

$$1 = 2 \cdot (-1)^2 + c \Longleftrightarrow c = 1 - 2 \cdot 1 \Longleftrightarrow c = -1$$

Die quadratische Gleichung lautet also $y = 2x^2 - 1$

[2] Es ginge auch mit dem Gleichsetzungs-, dem Einsetzungs- oder dem Additionsverfahren.

4 Nullstellenbestimmung

Nullstellen nennt man die Stellen einer Parabel, an denen sie die x-Achse schneidet oder zumindest berührt. An diesen Nullstellen nimmt die Funktion f(x) den Wert 0 an. Gesucht sind also die x-Werte, bei denen die y-Werte einer quadratischen Funktionsgleichung gleich Null sind. Deshalb kann man die Nullstellen einer quadratischen Gleichung finden, indem man für das y eine 0 einsetzt und anschließend die quadratische Gleichung löst. Dazu überführt man die quadratische Gleichung zunächst in die Normalform

$$\text{Normalform: } x^2 + px + q = 0 \tag{4}$$

und wendet dann die pq-Formel an.

$$\text{pq-Formel: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{5}$$

Näheres dazu erläutere ich in einem separaten Text.

Beispiel (siehe dazu auch die türkisfarbene Kurve in Abbildung 1 auf Seite 1):

$$\text{Normalform: } x^2 + 1x + 0 = 0$$

$$\text{pq-Formel: } x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0} \Longleftrightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 0$$

5 Scheitelpunkt

Der Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Parabel ist ihr tiefster Punkt. Bei einer nach unten geöffneten Parabel ist der Scheitelpunkt ihr höchster Punkt.

Betrachtet man die Abbildung 1 in Kapitel 2 auf Seite 1 genauer, dann erkennt man den Einfluß zweier Parameter auf den Scheitelpunkt. Ist kein lineares Glied vorhanden, dann entspricht die x-Koordinate des Scheitelpunktes genau dem Parameter, der im quadratischen Glied vom x-Wert abgezogen wird. Die y-Koordinate des Scheitelpunktes entspricht dem absoluten Glied. Man kann also aus dieser Form der quadratischen Funktionsgleichung den Scheitelpunkt direkt ablesen, und deshalb nennt man sie die Scheitelpunktform.

$$\text{Scheitelpunktform: } f(x) = a(x - d)^2 + c \tag{6}$$

Hat man nun aber eine quadratische Funktionsgleichung mit einem linearen Glied, dann muß man dieses loswerden, um zur Scheitelpunktform zu gelangen. Ähnlich wie schon bei der Suche nach den Nullstellen einer quadratischen Funktion macht man dies mit einer quadratischen Ergänzung. Dies kann unterschiedlich kompliziert sein. Wenn man Glück hat, dann gibt es in der quadratische Funktionsgleichung keinen Parameter d und die quadratischen Ergänzung ist relativ einfach.

Die Strategie besteht darin, das x des linearen Gliedes in das quadratische Glied hinein zu rechnen. Dies ist möglich, wenn man das quadratische und das lineare Glied so um ein absolutes Glied ergänzen kann, daß man diese 3 Elemente in eine binomische Formel überführen kann. So bekommt man statt eines linearen Gliedes den Parameter d im quadratischen Glied auf Kosten eines komplexeren absoluten Gliedes.

Versuchen wir es zunächst in allgemeiner Form, also mit Koeffizienten anstelle von konkreten Zahlen.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad |x^2 \text{ und bx in eine Klammer}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad |\text{quadratische Ergänzung}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \qquad |\text{-> binomische Formel}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \qquad |\text{lineares Glied vereinfachen}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \qquad |\text{Koordinaten auslesen}$$
$$\text{Der Scheitelpunkt ist } S(-\frac{b}{2a}| - \frac{b^2}{4a} + c)$$

Mit konkreten Zahlen fällt das Rechnen meistens leichter, weil man dann kürzen und addieren kann.

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 5 \qquad |x^2 \text{ und 3x in eine Klammer}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 5 \qquad |\text{quadratische Ergänzung}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 \qquad |\text{-> binomische Formel}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{18}{16} + 5 \qquad |\text{lineares Glied vereinfachen}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 1\frac{1}{8} + 5 \qquad |\text{lineares Glied vereinfachen}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 3\frac{7}{8} \qquad |\text{Koordinaten auslesen}$$
$$\text{Der Scheitelpunkt ist } S(-0,75|3,875)$$

Deutlich komplizierter wird es, wenn die quadratische Funktionsgleichung einen Parameter d enthält. Auch diesen Fall behandle ich zunächst in allgemeiner Form:

$$f(x) = a(x-d)^2 + bx + c \qquad |\text{+bd -bd}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a(x-d)^2 + bx - bd + bd + c \qquad |\text{b ausklammern}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a(x-d)^2 + b(x-d) + bd + c \qquad |\text{a ausklammern}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a[(x-d)^2 + \frac{b}{a}(x-d)] + bd + c \qquad |\text{quadr. Ergänz.}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a[(x-d)^2 + \frac{b}{a}(x-d) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + bd + c \qquad |\text{Binom}$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = a[x - d + \frac{b}{2a}]^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + bd + c$$

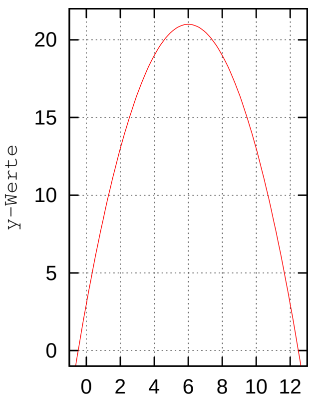
Hieraus kann man nun die Koordinaten des Scheitelpunktes direkt ablesen. Die Formel ist nur etwas unübersichtlich, aber beim Rechnen mit konkreten Zahlen vereinfacht sich die Sache schnell.

$$S\left(d + \frac{b}{2a} \;\;|\;\; -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + bd + c\right)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& f(x) = -0,5(x-2)^2 + 4x + 5 && |\text{+8 -8 ergänzen}\\
\iff & f(x) = -0,5(x-2)^2 + 4x - 8 + 8 + 5 && |\text{4 ausklammern}\\
\iff & f(x) = -0,5(x-2)^2 + 4(x-2) + 8 + 5 && |\text{-0,5 ausklammern}\\
\iff & f(x) = -0,5[(x-2)^2 + \frac{4}{-0,5}(x-2)] + 13 && |\text{quadratische Ergänzung}\\
\iff & f(x) = -0,5[(x-2)^2 - 8(x-2) + 4^2] + 0,5 \cdot 4^2 + 13 && |\text{binomische Formel}\\
\iff & f(x) = -0,5[(x-2) - 4]^2 + 8 + 13 && |\text{zusammenfassen}\\
\iff & f(x) = -0,5(x-6)^2 + 21 &&\\
& \text{Der Scheitelpunkt ist } S(6|21) &&
\end{aligned}$$

Abbildung 2: Beispiel der Scheitelpunkt-Berechnung



Die Kurve visualisiert das Ergebnis des konkreten Beispiels für eine Scheitelpunkt-Berechnung.

6 Extremstellen und Extremwerte quadratischer Funktionen

Aufgabe:

Wie lang muß bei einem Umfang von 20 cm die Bodenseite x eines Rechtecks sein, damit seine Fläche y möglichst groß ist?

Lösungsansatz:

Die Fläche y in Quadratzentimetern entspricht dem Produkt aus der Bodenseite x in Zentimetern und einer seitlichen Seite. Diese seitliche Seite lässt sich aber ausdrücken als die Hälfte der Differenz des Umfanges von 20 cm und der zweifachen Bodenseite.

Rechnet man dies aus, dann gelangt man mittels quadratischer Ergänzung zur Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung und kann aus dieser die Lösung des Problems ablesen.

$$
\begin{aligned}
ycm^2 &= xcm\left(\frac{20cm - 2xcm}{2}\right) \\
\Longleftrightarrow ycm^2 &= xcm \cdot (10cm - xcm) \\
\Longleftrightarrow ycm^2 &= xcm^2 \cdot (10 - x) \\
\Longleftrightarrow y &= x \cdot (10 - x) \\
\Longleftrightarrow y &= 10x - x^2 \\
\Longleftrightarrow y &= -x^2 + 10x \\
\Longleftrightarrow y &= -(x^2 - 10x) \\
\Longleftrightarrow y &= -(x^2 - 10x + 25) + 25 \\
\Longleftrightarrow y &= -(x - 5)^2 + 25
\end{aligned}
$$

Der Scheitelpunkt ist S(5|25). Dieses Ergebnis zeigt, daß die Bodenseite des Rechtecks 5 cm lang sein sollte, um eine Fläche von 25 Quadratzentimetern zu ergeben. Das Rechteck mit der maximalen Fläche ist also ein Quadrat.