Kinematik

Roland Heynkes

10.10.2005, Aachen

Dieser Artikel führt Annas Kinematik-Kapitel fort, weil die für mathematische Texte erforderlichen Erweiterungen von HTML von den gängigen Browsern immer noch nicht brauchbar dargestellt werden. Das Schreiben von pdf-Texten mit TEX ist deshalb für mich angenehmer als das Einfügen unzähliger Graphiken in HTML-Texte.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Geschwindigkeiten

Lässt man einen möglichst schweren Gegenstand nach leichtem Anstoßen antriebslos nur langsam über ein exakt waagerecht ausgerichtetes Luftkissen oder Magnetfeld schweben, dann bleibt die Erdanziehung wirkungslos und die bremsende Wirkung des Luftwiderstandes ist gering. Misst man nun zu verschiedenen Zeitpunkten t_i die bereits zurückgelegte Strecke s_i oder auf verschiedenen Streckenabschnitten $\Delta s = s_2 - s_1$ die zwischen beiden Messungen verstrichene Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$, dann ergibt eine Division von s_i durch t_i bzw. $\Delta s/\Delta t$ immer ungefähr den selben Quotienten $\overline{v}$. Der Strich über dem $\overline{v}$ bedeutet, dass es sich um eine gerichtete Größe[1] handelt.

$$\overline{v} = \frac{s_i}{t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(s_2 - s_1)}{(t_2 - t_1)} \tag{1}$$

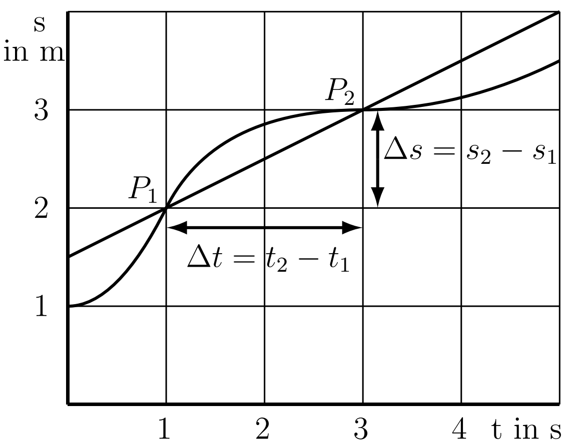
Geschwindigkeit ist also die zurückgelegte Wegstrecke pro Zeiteinheit. Der zurückgelegte Weg nimmt proportional zur verstrichenen Zeit zu, und man nennt dies das **Zeit-Weg-Gesetz**. Die **Zeit-Weg-Funktion** lautet $s(t) = vt$. Die Einheit der abgeleiteten physikalischen Größe Geschwindigkeit $\overline{v}$ (lateinisch velocitas) leitet sich von den physikalischen Grundgrößen für Zeit t (lateinisch tempus) und Weg s (lateinisch spatium) ab:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{1m}{1s} = 1\frac{m}{s} = 1m/s$$

$$\frac{1m}{1s} = \frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{60\cdot 60}h} = \frac{1}{1000}km \cdot \frac{60\cdot 60}{1}h^{-1} = \frac{3600\cdot km}{1000\cdot h} = 3,6\frac{km}{h} = 3,6km/h$$

Solange die Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, spielen die Zeitpunkte und die zeitlichen Abstände zwischen den Ortsbestimmungen keine Rolle. Misst man jedoch eine sich verändernde Geschwindigkeit, dann haben die Messzeitpunkte und deren Abstände entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis.

Abbildung 1: Geschwindigkeitsbestimmung im Zeit-Weg-Diagramm



Der Bestimmung der Geschwindigkeit liegen zwei Messpunkte $P_1(t_1|s_1)$ und $P_2(t_2|s_2)$ zugrunde. An diesen Messpunkten werden jeweils möglichst genau der Zeitpunkt und der Ort oder die bereits zurückgelegte Wegstrecke gemessen. Dann berechnet man die zwischen beiden Zeitpunkten verstrichene Zeitspanne als Differenz zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 sowie die in dieser Zeitspanne zurückgelegte Wegstrecke $s_2 - s_1$.

Da Bewegungen normalerweise nicht geradlinig und gleichförmig sind, betrachtet man in der Physik die abgeleitete Größe Geschwindigkeit differenzierter. Die Abbildung 1 zeigt zwei unterschiedliche Geschwindigkeitskurven, die sich aber an den beiden Messpunkten

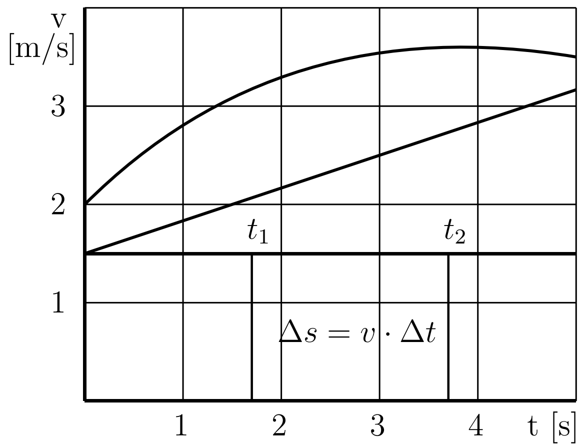
[1]Eine gerichtete physikalische Größe nennt man Vektor, eine ungerichtete Skalar.

P_1 und P_2 schneiden. Ermittelt man anhand dieser beiden Messpunkte die Geschwindigkeiten, dann wird in beiden Fällen das Ergebnis identisch sein. Aber während bei der eine geradlinig-gleichförmige Bewegung bzw. konstante Geschwindigkeit repräsentierenden Geraden die Wahl der Meßpunkte keine Rolle spielt, wäre das Ergebnis der Geschwindigkeitsbestimmung bei der kurvigen Kurve ein ganz anderes gewesen, wenn man zwei andere Meßpunkte gewählt hätte. Dies macht deutlich, daß man hier eigentlich nur die auch Intervallgeschwindigkeit genannte Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten berechnet hat. Der Verlauf der Kurve zeigt, dass sich zwischen den beiden Messpunkten die tatächliche Geschwindigkeit der entsprechenden Bewegung ständig verändert hat. Um die Diskrepanz zwischen der Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt und der Intervallgeschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten möglichst gering zu halten, muss man das Zeitintervall zwischen den Messpunkten möglichst klein halten.

2 Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm

Anstatt wie in Abbildung 1 auf der vorherigen Seite die zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit aufzutragen, kann man auch in einem sogenannten Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auftragen.

Abbildung 2: Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm



Dieses Diagramm zeigt unten eine konstante Geschwindigkeit, in der Mitte eine mit konsanter Beschleunigung zunehmende Geschwindigkeit und oben die Entwicklung einer Geschwindigkeit, deren Beschleunigung immer mehr abnimmt und schließlich sogar negativ wird. Bei konstanter Geschwindigkeit lässt sich leicht die zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegte Wegstrecke berechnen.

Konstante Geschwindigkeiten erkennt man in Zeit-Weg-Diagrammen wie Abbildung 1 auf der vorherigen Seite an konstanten Steigungen, während sie in Zeit-Geschwindigkeits-Diagrammen wie Abbildung 2 als waagerechte Linien erscheinen. In Zeit-Geschwindigkeits-Diagrammen bedeuten Geraden mit konstanter Steigung gleichmäßig zu- oder abnehmende Geschwindigkeiten aufgrund gleichbleibender Beschleunigungen. Zeit-Weg-Diagramme zeigen gleichmäßige Beschleunigungen als quadratische Funktionen (Parabeln).

3 Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung

3.1 Zeit-Weg-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Man kann das in Kapitel 1 auf der vorherigen Seite beschriebene Experiment so modifizieren, dass bei schräg gestellter Schwebestrecke die Erdanziehung oder mit einem Luftstrom eine andere Kraft auf nicht zu großer Strecke praktisch gleich bleibend auf den beweglichen Gegenstand wirkt. Misst man nun wieder zu verschiedenen Zeitpunkten t_i die bis dahin zurückgelegten Strecken s_i, dann bilden die Messwerte im Zeit-Weg-Diagramm anders als bei einer nicht beschleunigten und daher geradlinig und gleichförmigen Bewegung keine Gerade, sondern eine Kurve, die einer Parabel zumindest ähnelt. Daraus folgt die Vermutung, das mathematische Verhältnis zwischen den gemessenen Zeitpunkten t_i und den zugehörigen Wegstrecken s_i könnte ein quadratisches sein. Man kann diese Vermutung leicht verifizieren, indem man jede Wegstrecke s_i durch das Quadrat des entsprechenden Zeitpunktes t_i teilt und immer ungefähr den selben Quotienten C_1 erhält.

$$\frac{s_i}{(t_i)^2} = C_1 \tag{2}$$

Das Zeit-Weg-Gesetz bzw. die Zeit-Weg-Funktion dieser Bewegung lauten daher:

$$s = C_1 \cdot t^2 \qquad bzw. \qquad s(t) = C_1 \cdot t^2 \tag{3}$$

Die Wegstrecke nimmt also proportional zum Quadrat der verstrichenen Zeit zu und die Zeit-Weg-Kurve ist ein Parabel-Ast.

3.2 Zeit-Geschwindigkeit-Funktion der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Im Gegensatz zur gleichförmigen Bewegung sind die als Quotienten der Wegstrecken s_i und Zeitpunkte t_i bzw. Wegabschnitte Δs und Zeitintervalle Δt ermittelten Geschwindigkeiten $\overline{v_i}$ nicht alle gleich, sondern bilden im Falle einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in einem Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm eine Gerade mit einer von Null verschiedenen positiven oder negativen Steigung. Ein Beispiel dafür ist die Gerade in der Mitte der Abbildung 2 auf der vorherigen Seite. Eine Gerade ergibt sich deshalb, weil die Geschwindigkeit $\overline{v} = s/t$ in gleich langen aufeinander folgenden Zeitabschnitten Δt stets um den selben Betrag $\Delta \overline{v}$, aber auch unabhängig von der Wahl der Zeitabschnitte immer proportional zur Zeit zu- oder abnimmt. Lässt man das Experiment mit einem ruhenden Körper beginnen, dann kann man in der Gleichung 4 auf einen y-Achsenabschnitt verzichten, sofern man immer genau zwischen zwei Zeitmesspunkten t_i und t_{i+1} über den Mitten t_m die Intervall- oder Duchschnittgeschwindigkeit $\overline{v_m} = \Delta s/\Delta t_m$ aufträgt. Man bekommt so eine durch den Koordinatenursprung gehende Gerade mit einer Geradengleichung, welche der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion entspricht, für jedes noch so kleine Zeitintervall gilt und deshalb für jeden Zeitpunkt die Momentangeschwindkeit angibt:

$$\overline{v} = C_2 \cdot t_m \Longleftrightarrow \overline{v} = \overline{a} \cdot t_m \tag{4}$$

3.3 Durchschnittsbeschleunigung der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Gemäß Gleichung 4 nimmt die Geschwindigkeit $\overline{v}$ proportional zur verstrichenen Zeit t zu. Physikalisch bedeutet dies, dass unter gleichbleibender Krafteinwirkung die Geschwindigkeit oder zumindest ihre auf die einwirkende Kraft gerichtete Komponente gleichmäßig zu oder abnimmt. Diese gleichmäßige Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit $\overline{v}$ nennt man eine konstante oder gleichmäßige Beschleunigung $\overline{a}$ (lateinisch accelerare), die mathematisch dem Proportionalitätsfaktor C_2 entspricht. Also bewirkt eine gleichbleibende

Krafteinwirkung eine konstante Beschleunigung $\overline{a}$ und eine geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines beweglichen Körpers.

Die Intervall- oder Durchschnittsbeschleunigung $\overline{a}$ zwischen zwei beliebigen Messpunkten $(t_1|v_1)$ und $(t_2|v_2)$ ist der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung $\Delta\overline{v} = \overline{v}_2 - \overline{v}_1$ und der dabei verflossenen Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\overline{a} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{s_2/\Delta t - s_1/\Delta t}{t_2 - t_1} = \frac{(s_2 - s_1)/\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta s/\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t^2} \qquad \overline{a} = \frac{\Delta s}{\Delta t^2} \tag{5}$$

Dementsprechend erhält man die Einheit der Beschleunigung:

$$\overline{a} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{1m/s}{1s} = 1m/s^2$$

Eine konstante Beschleunigung um $\overline{a} = 1m/s^2$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit $\overline{v}$ pro Sekunde um $1m/s$ gleichmäßig zunimmt.

Eine Auflösung der Gleichung 5 nach der Änderung der Geschwindigkeit $\Delta\overline{v}$ ergibt:

$$\overline{a} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} \Longleftrightarrow \Delta\overline{v} = \overline{a} \cdot \Delta t \tag{6}$$

3.4 Zeit-Weg-Funktion der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Will man bei konstant steigender Geschwindigkeit mit der nach s aufgelösten Gleichung 1 auf Seite 1 die bereits zurückgelegte Wegstrecke berechnen, dann kann dies nur auf der Grundlage von Durchschnittsgeschwindigkeiten geschehen, die für bestimmte Zeitabschnitte zu berechnen sind. Steigt beispielsweise die Geschwindigkeit innerhalb einer Sekunde um 1 Meter pro Sekunde von 5 m/s auf 6 m/s, dann beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit: $\frac{5m/s+6m/s}{2} = 5,5\frac{m}{s}$. Allgemein ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2:

$$\oslash\overline{v} = \frac{\overline{v_1} + \overline{v_2}}{2} = \frac{\overline{a} \cdot t_1 + \overline{a} \cdot t_2}{2} = \overline{a}\frac{t_1 + t_2}{2} \tag{7}$$

Man kann es sich einfach machen und den Zeitpunkt t_1 auf einen Nullpunkt setzen, an dem die Beschleunigung plötzlich einsetzt und an dem auch die Geschwindigkeit noch den Wert 0 besitzt. Dann vereinfacht sich die Gleichung 7 zu:

$$\oslash\overline{v} = \overline{a}\frac{t_1 + t_2}{2} = \overline{a}\frac{0 + t_2}{2} = \overline{a}\frac{t_2}{2} = \frac{1}{2}\overline{a}t_2 \tag{8}$$

Kommen wir nun zurück zum ursprünglichen Anliegen, bei konstant steigender Geschwindigkeit mit der nach s_i aufgelösten Gleichung 1 auf Seite 1 ($\overline{v} = \frac{s_i}{t_i}$) die bereits zurückgelegte Wegstrecke zu berechnen. Wir können in den Gleichungen 7 und 8 die Durchschnittsgeschwindigkeit $\oslash\overline{v}$ gemäß Gleichung 1 auf Seite 1 durch $\frac{s_i}{t_i}$ ersetzen und dann nach s_i auflösen. Dabei entspricht in Gleichung 9 der Zeitpunkt t_i dem zeitlichen Mittelwert $\frac{t_1+t_2}{2}$:

$$\oslash\overline{v} = \overline{a}\frac{t_1 + t_2}{2} \Longleftrightarrow \frac{s}{\frac{t_1+t_2}{2}} = \overline{a}\frac{t_1 + t_2}{2} \Longleftrightarrow s = \overline{a}(\frac{t_1 + t_2}{2})^2 \tag{9}$$

$$\oslash\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{a}t_2 \Longleftrightarrow \frac{s_2}{t_2} = \frac{1}{2}\overline{a}t_2 \Longleftrightarrow s_2 = \frac{1}{2}\overline{a}(t_2)^2 \tag{10}$$

Demnach lauten die Bewegungsgesetze der geradlinig gleichmäßig beschleunigten[2] Bewegung:

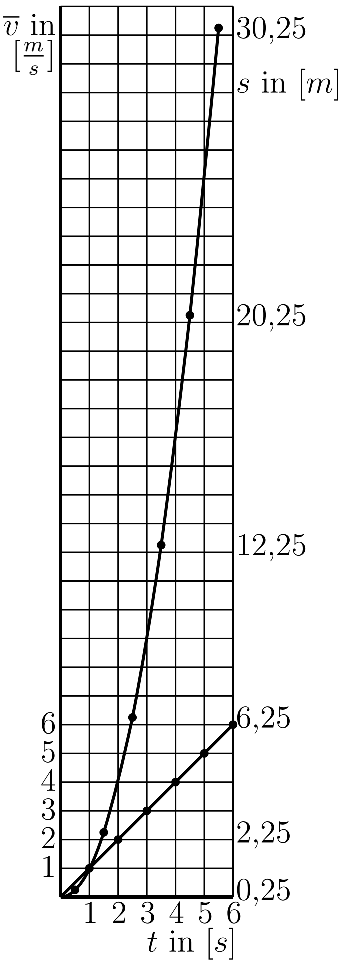
Zeit-Weg-Funktion	$s = \frac{1}{2}\overline{a}t^2$
Zeit-Geschwindigkeit-Funktion	$\overline{v} = \overline{a}t$

Setzt man eine konstante Beschleunigung $\overline{a} = 1m/s^2$ in die Gleichungen 6 auf der vorherigen Seite und 9 auf der vorherigen Seite ein und berechnet $\Delta\overline{v}$ und s für verschiedene Zeitpunkte t_i bzw. Zeitabschnitte Δt, dann erhält man Wertetabellen für die Entwicklung der Geschwindigkeit und die zurückgelegte Wegstrecke.

Tabelle 1: Entwicklung der Durchschnittsgeschwindigkeiten und Wegstrecke

Zeitpunkte	1s	2s	3s	4s	5s	6s
$\Delta\overline{v} = 1m/s^2 \cdot \Delta t$	$1m/s$	$2m/s$	$3m/s$	$4m/s$	$5m/s$	$6m/s$
Zeitpunkte	$0,5s$	$1,5s$	$2,5s$	$3,5s$	$4,5s$	$5,5s$
$s = 1m/s^2 \cdot (\frac{t_1+t_2}{2})^2$	$0,25m$	$2,25m$	$6,25m$	$12,25m$	$20,25m$	$30,25m$

Abbildung 3: Weg und Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung



Dieses Diagramm visualisiert die Wertetabelle und zeigt, dass bei konstanter Beschleunigung die Geschwindigkeit konstant zunimmt, während die zurückgelegte Strecke quadratisch wächst.
Der Geraden und der Parabel liegen die Wertetabellen zugrunde, die mit folgenden beiden Gleichungen berechnet wurden:

$$\Delta\overline{v} = \overline{a} \cdot \Delta t \Longleftrightarrow \Delta\overline{v} = 1m/s^2 \cdot \Delta t$$

$$s = \overline{a} \cdot (\frac{t_1 + t_2}{2})^2 \Longleftrightarrow s = 1m/s^2 \cdot (\frac{t_1 + t_2}{2})^2$$

[2]Bei negativer Beschleunigung spricht man häufiger von Verzögerung bzw. verzögerter Bewegung.

3.5 Zeit-Geschwindigkeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Setzt man die rechte Seite des Zeit-Weg-Gesetzes 3 auf Seite 3 für die s_1 und s_2 in der Differenzenschreibweise der allgemeinen Geschwindigkeitsgleichung 1 auf Seite 1 ein, dann erhält man für die Intervallgeschwindigkeit mit $t_1 \neq t_2$:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{C_1 {t_2}^2 - C_1 {t_1}^2}{t_2 - t_1} = C_1 \frac{{t_2}^2 - {t_1}^2}{t_2 - t_1} = C_1 \frac{(t_2 + t_1)(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = C_1(t_2 + t_1)$$

Dies gilt für beliebige und vor allem auch für beliebig kleine Differenzen $t_2 - t_1$. Betrachtet man einen schon fast zum Zeitpunkt geschrumpften Zeitraum $t_2 - t_1$, dann wird aus der Intervallgeschwindigkeit eine Momentangeschwindigkeit und dann sind t_1 und t_2 praktisch gleich groß. Deshalb lässt sich $\overline{v} = C_1(t_2 + t_1)$ zum Zeit-Geschwindigkeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung vereinfachen:

$$\overline{v} = 2C_1 t \tag{11}$$

3.6 Zeit-Beschleunigung-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Setzt man die rechte Seite der Gleichung 11 für die Geschwindigkeiten $\overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$ in die Gleichung 5 auf Seite 4 für die Intervall- oder Durchschnittsbeschleunigung ein, dann erhält man unter der Bedingung $t_1 \neq t_2$ das Zeit-Beschleunigung-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

$$\overline{a} = \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t} = \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{2C_1 t_2 - 2C_1 t_1}{t_2 - t_1} = 2C_1 \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = 2C_1 \tag{12}$$

Gleichung 4 auf Seite 3 zeigt, dass $\overline{a}$ der Konstanten C_2 entspricht. Laut Gleichung 12 muss also gelten $2C_1 = C_2$.

3.7 Endgeschwindigkeit bei konstant beschleunigter geradliniger Bewegung

Löst man die Gleichung 6 auf Seite 4 ($\Delta \overline{v} = \overline{a} \cdot \Delta t$) nach Δt auf ($\Delta t = \frac{\Delta \overline{v}}{\overline{a}}$) und setzt dies in Gleichung 10 auf Seite 4 ($\Delta s = \frac{1}{2} \overline{a} \Delta t^2$) ein, dann erhält man:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \overline{a} \Delta t^2 \Longleftrightarrow 2\Delta s = \overline{a} (\frac{\Delta \overline{v}}{\overline{a}})^2 \Longleftrightarrow 2\Delta s = \frac{\Delta \overline{v}^2}{\overline{a}} \Longleftrightarrow 2 \cdot \Delta s \cdot \overline{a} = \Delta \overline{v}^2$$

$$\Longleftrightarrow \Delta \overline{v} = \sqrt{2 \cdot \overline{a} \cdot \Delta s} \tag{13}$$

$\Delta \overline{v}$ ist die Geschwindigkeitsänderung, die bei einer konstanten Beschleunigung $\overline{a}$ insgesamt auf einer Strecke Δs erreicht wird. Wenn die Geschwindigkeit zu Beginn der Beschleunigung gleich Null war, dann entspricht $\Delta \overline{v}$ der Endgeschwindigkeit $\overline{v}$.