Nullstellen quadratischer Gleichungen

Roland Heynkes

5.11.2005, Aachen

Nach y aufgelöst haben quadratische Gleichungen die Form $y = ax^2 + bx + c$. Zeichnet man für jedes x auf der rechten Seite und das daraus resultierende y auf der linken Seite der quadratischen Gleichung einen Punkt in ein zweidimensionales Koordinatensystem, dann erhält man eine Parabel. Falls diese Parabel irgendwo die x-Achse schneidet oder zumindest berührt, nennt man so einen Schnitt- oder Berührungspunkt Nullstelle. Quadratische Gleichungen können 0, 1 oder 2 Nullstellen besitzen. Um sie zu finden, kann man verschiedene Verfahren anwenden.

Inhaltsverzeichnis

1 Der allgemeine Lösungsweg

An einer Nullstelle ist die y-Koordinate einer quadratischen Gleichung gleich Null. Deshalb kann man die Nullstellen einer quadratischen Gleichung finden, indem man für das y eine 0 einsetzt und anschließend die quadratische Gleichung löst.

2 Quadratische Ergänzung

Lösen kann man quadratische Gleichungen zum Beispiel mit dem Trick einer quadratischen Ergänzung. Gemeint ist damit, daß man das in normalen quadratischen Gleichungen enthaltene Binom quasi freilegt. Zuvor muß man dafür allerdings die quadratische Gleichung in ihre Normalform überführen. Nehmen wir also mal eine allgemein formulierte quadratische Gleichung mit einem quadratischen Glied ax^2, einem linearen Glied bx und einem absoluten Glied c, mit der wir die Sache durchspielen können:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

Da wir Nullstellen dieser quadratischen Gleichung suchen, setzen wir y = 0 und vertauschen auch gleich die Seiten der Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

Nun müssen wir den Koeffizienten von x^2 loswerden, um zur Normalform zu kommen. Dazu werden beide Seiten der Gleichung durch a geteilt, wobei 0 / a gleich 0 bleibt:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{3}$$

Jetzt können wir die quadratische Ergänzung ermitteln, indem wir den Faktor vor dem nicht quadrierten x durch 2 teilen und das Ergebnis quadrieren. Diese quadratische Ergänzung wird dann beiden Seiten der Gleichung hinzugefügt:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \tag{4}$$

Man kann nun das absolute Glied auf die andere Seite der Gleichung bringen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a} \tag{5}$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht jetzt eine binomische Formel, die entsprechend umformuliert werden kann:

$$\left(x + \frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a} \tag{6}$$

Dann wird auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel gezogen, wobei es beim Wurzelziehen immer zwei Lösungen gibt. Aufgrund des Wurzelziehens kann auf beiden Seiten der Gleichung vor dem Term ein Plus oder ein Minus stehen und es wären insgesamt 4 Versionen der Gleichung möglich:

$$\left(x+\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\frac{c}{a}} \qquad \left(x+\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)=-\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

$$-\left(x+\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)=-\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\frac{c}{a}} \qquad -\left(x+\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

Multipliziert man allerdings in der unteren Zeile beide Seiten beider Gleichungen mit -1, dann entsprechen sie genau den beiden Gleichungen in der oberen Zeile. Die untere Zeile kann man sich also sparen. Normalerweise schreibt man auch nicht zwei Gleichungen, sondern deutet die beiden Möglichkeiten durch ein Plusminus ($\pm$) vor einer der beiden Seiten der Gleichung an. Dabei ist es eigentlich egal, auf welche Seite man das Plusminus schreibt, aber in diesem Fall ist es üblich und steigert daher den Wiedererkennungswert, das Plusminus vor die rechte Seite der Gleichung zu schreiben:

$$x+\frac{\frac{b}{a}}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\frac{c}{a}} \tag{7}$$

Abschließend muß nur noch nach x aufgelöst werden.

$$x_{1,2}=-\frac{\frac{b}{a}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2-\frac{c}{a}} \tag{8}$$

Man kann diese Formel noch vereinfachen und die Ausklammerung des Faktors 2a in einen Gesamtnenner vorbereiten:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac}{4a^2}} \tag{9}$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}} \tag{10}$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \tag{11}$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{12}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{13}$$

Diese letzte Formel 13 zur Lösung quadratischer Gleichungen in ihrer allgemeinen Form 1 auf der vorherigen Seite nennt man auch Mitternachtsformel, weil Mathematikstudenten sie im Schlaf aufsagen können sollen.

3 Die schnelle Lösung per pq-Formel

Geht man nicht wie hier vorgeführt ganz allgemein von einer quadratischen Gleichung wie in 1 auf Seite 1, sondern schon von deren Normalform 3 auf Seite 1 aus, dann schreibt man statt $\frac{b}{a}$ als Koeffizienten des linearen Gliedes vereinfachend p, und das Absolutglied in der Normalform nennt man einfach q statt $\frac{c}{a}$. Vereinfachen wir in diesem Sinne unsere ganz allgemein abgeleitete Formel 8 auf der vorherigen Seite, dann erhält man die als pq-Formel bekannte Form:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{14}$$

Anstatt also immer wieder die im Prinzip gleichen Rechenschritte auszuführen und jede einzelne quadratische Gleichung für sich mittels quadratischer Ergänzung zu lösen, kann man einmal formal eine ausschließlich mit Variablen geschriebene quadratische Gleichung bis zur pq-Formel lösen. Deshalb muß man anschließend quadratische Gleichungen nur noch in die Normalform bringen und den Koeffizienten des linearen Gliedes sowie das absolute Glied in die pq-Formel einsetzen. Von da aus ist die Lösung der quadratischen Gleichung schnell und kaum noch fehleranfällig erledigt.

4 Auch ohne pq-Formel leicht lösbare Sonderfälle

4.1 quadratische Gleichungen ohne lineares Glied

Wenn das lineare Glied fehlt ($ax^2 + c = 0$ und $x^2 + q = 0$), dann muß der Koeffizient p = 0 sein. Wäre statt dessen das x = 0, dann müsste auch das quadratische Glied = 0 sein.

$$\text{Einsetzen in } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ ergibt } -0 \pm \sqrt{0-q} = \pm\sqrt{-q} \tag{15}$$

Der Radikand darf nicht negativ sein, und deshalb sind quadratische Gleichungen mit p = 0 mit der pq-Formel zumindest dann nicht lösbar, wenn q größer als Null ist. Es läßt sich aber recht einfach zeigen, daß die pq-Formel bei negativem q anwendbar ist:

$$ax^2 + c = 0 \Longleftrightarrow ax^2 = -c \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Longleftrightarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}} \tag{16}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-q} \tag{17}$$

4.2 quadratische Gleichungen ohne absolutes Glied

Wenn das absolute Glied fehlt ($ax^2 + bx = 0$ und $x^2 + px = 0$), dann gilt q = 0.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2} \tag{18}$$

$x_1 = 0$ und $x_2 = -p$

Dieses Ergebnis der Einsetzung in die pq-Formel läßt sich leicht auf anderem Wege kontrollieren:

$$x^2 + px = 0 \Longleftrightarrow x(x + p) = 0$$

Es muß also entweder x = 0 sein oder x + p muß gleich Null sein. Daraus folgt:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -p$$

Die pq-Formel ist also in diesem Spezialfall voll anwendbar.

4.3 in Linearfaktoren zerlegte quadratische Gleichungen

Man kann quadratische Gleichungen in sogenannte in Linearfaktoren zerlegen und muß diese für die Nullstellen-Ermittlung nicht unbedingt zurück in die Normalform bringen. Man sieht nämlich in den Linearfaktoren sofort die Lösungen.

$$x^2 + (r - s)x - rs = 0 \Longleftrightarrow (x + r)(x - s) = 0$$

Die linke Seite der rechten Gleichung hat dann insgesamt den Wert 0, wenn $x + r = 0$ oder $x - s = 0$ bzw. wenn x = -r oder x = s. Natürlich dürfen auch beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein.